ریاضیات زنده

کاربردهایی ملموس و زیبا از اشکال هندسی در زندگی واقعی

حسن ملکی، دانشجوی دکترای هندسه، گرایش سیستم‌های دینامیکی، خانهٔ ریاضیات کرمان
حسین ملکی، کارشناس ارشد جبر، خانهٔ ریاضیات کرمان

چکیده

تعاریف، ویژگی‌ها و فرمول‌های ریاضی مربوط به محیط و مساحت اشکال هندسی معروف از قبیل مثلث، مربع و دایره را اغلب دانش‌آموزان می‌دانند اما کمتر با کاربردهای شگفت‌انگیز و مهم این اشکال در دنیای واقعی، طبیعت و علوم دیگر آشنایی دارند. در صورت تحقق، این آشنایی می‌تواند سرآغاز یک تحرک فکری و فعالیت علمی در دانش‌آموزان باشد تا دانش ریاضی خود را عمق بخشند، آن را به‌گونه‌ای کاربردی فرا بگیرند، در حل مسائل جهان پیرامونشان از آن استفاده کنند و در پایان، از یادگیری ریاضی لذت ببرند. در این مقاله با آوردن مثال‌های مناسب و زیبا از منابع مختلف هندسه، در جست‌وجوی نشان دادن ارتباطی ملموس بین هندسه و مسائل دنیای واقعی هستیم تا از این طریق درک و یادگیری هندسه برای دانش‌آموزان لذت‌بخش و بامعنا شود. این مقاله ثمره یک کارگروه دو روزه در سومین جشنوارهٔ خانه ریاضیات کرمان است که برای چهار گروه از دانش‌آموزان اول و دوم دبیرستان در دههٔ ریاضیات ارائه شد. هدف کارگاه، معرفی اشکال هندسی به‌گونه‌ای کاربردی و ملموس، یافتن کاربردهای آن‌ها در طبیعت و زندگی واقعی و بالا بردن مهارت دانش‌آموزان در به‌کارگیری هندسه برای حل مسائل دنیای پیرامونشان بود. روش انجام کارگاه، به‌صورت گروهی و مشارکت فعال بود. تلاش شد مفاهیم مجرد با مثال‌های کاربردی از دنیای واقعی معرفی شوند. نظرسنجی انجام شده از شرکت کنندگان، تأثیر مثبت و عمیق استفاده از مسائل دنیای واقعی برای تدریس آموزش مفاهیم هندسی اولیه را نشان می‌دهد.

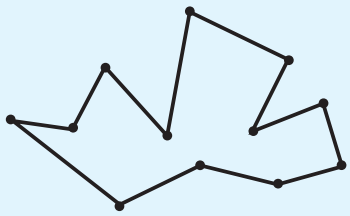
کلیدواژه‌ها: کاربرد ریاضیات، مثلث، دایره، شش‌ضلعی منتظم، مثلث رولو

مقدمه

در بیانیهٔ «در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان» که یکی از سندهای معتبر تاریخی در آموزش ریاضی است و به امضای ۷۵ نفر از ریاضی‌دانان جهان رسیده است [۱]، در باب برنامهٔ درسی دورهٔ دبیرستان چنین آمده است: «معرفی مفاهیم جدید بدون داشتن زمینهٔ قبلی کافی در خصوص حقیقت‌های ملموس، معرفی مفاهیم مجرد در زمانی که هنوز تجربه‌ای از تجرید وجود ندارد یا عجله در معرفی کردن مفاهیم بدون کاربردهای ملموسی که بتوانند دانش‌آموزان را به تحرک فکری و فعالیت وادارند بدتر از بی‌حاصلی آن است. در واقع، صورت‌گرایی زودرس ممکن است به عقیم کردن یادگیری ریاضی منجر شود. معرفی زودرس انتزاع، به‌ویژه با مقاومت ذهن‌های نقاد و کنجکاو روبه‌رو می‌شود؛ ذهن‌هایی که قبل از پذیرش انتزاع، خیلی دوست دارند بدانند که این تجرید بر چه اساسی استوار است و چگونه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد... . ریاضی ابزار اساسی و زبان علوم است. جدا کردن ریاضیات از علوم دیگر، موجب فقدان و گم شدن مهم‌ترین انگیزه‌ها، زیبایی‌ها و محرک‌های ریاضیات می‌شود.» این قسمت از بیانیهٔ مذکور، اهمیت موضوع و آسیب‌های مرتبط را به روشنی بیان کرده و کسانی که با آموزش ریاضی در دبیرستان سر و کار دارند، نمی‌توانند این موضوع را کم‌اهمیت بپندارند، **عقیم شدن یادگیری ریاضی** در دانش‌آموزانی که در آینده احتیاج حیاتی به تفکر ریاضی و استفاده از آن در حل مسائل زندگی روزمره دارند به تنهایی می‌تواند محرک ما برای اندیشیدن در زمینهٔ آموزش مفاهیم ریاضی باشد. ما در این مقاله، تلاش داریم اشکال هندسی را با این نگاه معرفی کنیم. برای این منظور، از بین اشکال هندسی معروف، **مثلث**، **دایره**، **شش‌ضلعی منتظم** و همچنین شکل هندسی دیگری به‌نام **مثلث رولو**[1] را برای بحث و مطالعه انتخاب کرده‌ایم. در هر مورد با طرح چند سؤال از دنیای واقعی بحث را آغاز می‌کنیم و سپس با استفاده از خواص و ویژگی شکل مورد نظر را بررسی و سپس به سؤالات می‌پردازیم. اطلاعات مورد نیاز در سراسر مقاله، تعاریف اولیه اشکال هندسی و رابطه‌های محیط و مساحت آن‌هاست. این مقاله ثمرهٔ یک کارگاه دو روزه در سومین جشنوارهٔ خانهٔ ریاضیات کرمان است که برای چهار گروه از دانش‌آموزان اول و دوم دبیرستان در دههٔ ریاضیات ارائه شد. همان‌گونه که انتظار می‌رفت بازخورد دانش‌آموزان در پایان کارگاه مثبت بود. آن‌ها بیان می‌کردند که اگر کلاس‌های ریاضی هم به این شکل ارتباط مستقیمی با محیط پیرامونشان داشته باشند آن‌ها بسیار راحت‌تر و بهتر ریاضی را درک می‌کنند و یاد می‌گیرند. آن‌ها بیان می‌کردند که انتظار نداشته‌اند ریاضی بدین سان جذاب و کاربردی باشد. آن‌ها از مثال‌های واقعی از کار طبیعت، که با ریاضی می‌توان آن‌ها را بهتر فهمید، به وجد آمده بودند. براساس این کارگاه، یک مقاله در قالب پوستر تحت عنوان «محتوای درسی و نگرش دانش‌آموزان» در کنفرانس ریاضی سمنان ارائه شده است.

مثلث

در نظر بگیرید که شما می‌خواهید مساحت زمینی به شکل (۱) را محاسبه کنید و تنها وسیلهٔ اندازه‌گیری موجود، متری است که با آن می‌توانید اندازهٔ اضلاع آن زمین و همچنین فاصله بین رئوس چندضلعی را اندازه بگیرید. شما برای حل این مسئله چه راه حلی پیشنهاد می‌کنید؟



شکل ۱. زمین موردنظر

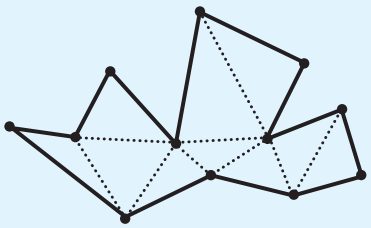
همهٔ ما با مثلث و ویژگی‌های آن کم و بیش آشنایی داریم و می‌دانیم که با معلوم بودن یک ارتفاع h و قاعدهٔ نظیرش a، مساحت مثلث از رابطهٔ $S = \frac{1}{2}ha$ به‌دست می‌آید. اما آن حالتی را در نظر بگیرید[2] که اندازهٔ هیچ کدام از ارتفاع‌های مثلث در دست نباشد و فقط اندازهٔ اضلاع مثلث را داشته باشیم. در مسائل کاربردی مهندسی و معماری واقعی این اتفاق بسیار می‌افتد و استفاده از فرمول بالا با مشکلاتی همراه است. در عمل و در مقیاس بزرگ، در مثلث‌هایی که فقط طول اضلاع را داریم، یافتن پای عمود روی

قاعده، برای محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع بسیار دشوار و زمان‌بر است. بنابراین سؤال را دوباره بیان می‌کنیم: مساحت مثلث با معلوم بودن طول اضلاع آن چگونه محاسبه می‌شود؟

جالب است بدانید که یونانیان حدود ۲۰۰۰ سال پیش با این سؤال مواجه شدند. آن‌ها توانسته بودند این سؤال را به دقیق‌ترین شکل ممکن و با کمترین امکانات حل کنند. راه حل آن‌ها کاربرد عملی و محاسباتی داشته و دارد. آن‌ها مسئله را با استفاده از فرمول معروف **هرون**[۲] حل می‌کردند. فرمولی زیبا که برای استفاده از آن نیازی به زوایای داخلی مثلث و یا رسم ارتفاع نیست، فقط داشتن طول اضلاع برای محاسبهٔ مساحت کافی است: اگر P نصف محیط مثلث باشد، مساحت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\,,\ P=\frac{a+b+c}{2}$$

این مقدمه چه ارتباطی به سؤال ابتدایی این قسمت دارد؟ **هر چندضلعی را می‌توان با رسم خطوط راست بین رئوس آن، به مثلث‌های مجزا افراز کرد. این کار را مثلث‌بندی چندضلعی می‌گویند.** مثلاً در مثال بالا، زمین پس از مثلث‌بندی به شکل (۲) درمی‌آید و ما می‌توانیم با به‌دست آوردن طول اضلاع هر کدام از مثلث‌ها، مساحت هر مثلث و در نهایت مساحت کل شکل را به‌دست آوریم.

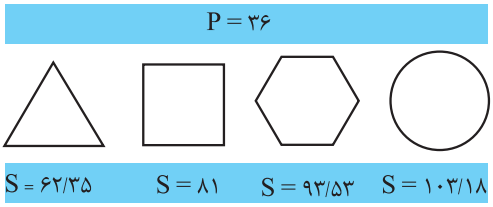


شکل ۲. زمین مثلث‌بندی شده

در این قسمت، سؤال‌های بیشتری نیز می‌توان مطرح کرد. برای مثال اثبات فرمول هرون بر اساس مقدمات اولیه و استفاده از هندسهٔ اقلیدسی چگونه است؟ برای مثلث چه خاصیت‌های دیگری می‌توان یافت که در زندگی روزمره به درد بخورد؟ مثلث در هنر و معماری چه معانی و خواصی دارد؟

دایره

بحث را با چند سؤال آغاز می‌کنیم: **چرا لوله‌های انتقال آب، نفت و گاز مقطع دایره‌ای شکل دارند؟ این انتخاب چه دلیل ریاضی می‌تواند داشته باشد؟ فرض کنید طنابی به طول ۳۶ متر در اختیار داشته باشید و همچنین اجازه داشته باشید که با آن مقداری از یک زمین کشاورزی را برای خود حصارکشی کنید. برای اینکه مقدار زمین بیشتری را تصاحب کنید چه شکل هندسی را برای حصارکشی انتخاب می‌کنید؟ از بین مثلث، مربع، شش‌ضلعی منتظم و دایره کدام یک را انتخاب می‌کنید؟** این دو سؤال ما را به خاصیت عجیبی از دایره می‌رساند که در طبیعت و صنعت بسیار پرکاربرد و حیاتی است. اگر با طناب ۳۶ متری مثلث، مربع و شش‌ضلعی منتظم بسازیم، از آنجا که در این اشکال، طول اضلاع برابر است، طول ضلع هر کدام به‌ترتیب، ۱۲، ۹ و ۶ متر خواهد بود. اگر دایره بسازیم، شعاع دایره ۵/۷۳ متر خواهد شد. با استفاده از این اعداد و فرمول‌های مساحت، شکل (۳) را داریم:



شکل ۳. مقایسه مساحت شکل‌ها با محیط برابر

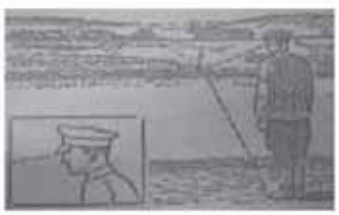
همان‌گونه که در شکل (۳) دیده می‌شود در بین چهار شکلی که محیط یکسان دارند، دایره بیشترین مساحت را دارد. قضیه مشهور زیر حالت کلی این مطلب است که همان خاصیت عجیب و پر رمز و راز دایره را بیان می‌کند:

قضیهٔ برابر محیطی [۲] در بین منحنی‌های بسته با محیط ثابت، دایره بیشترین مساحت را دارد.

حال به سؤال لوله‌های انتقال آب، نفت و گاز برمی‌گردیم. مقطع همهٔ این لوله‌ها به‌صورت دایره است. به‌عبارت بهتر لوله‌ها استوانه‌ای شکل هستند! با کمک قضیهٔ برابر محیطی، می‌توانیم دلیل این انتخاب را بدانیم. یکی از فاکتورهای اساسی برای طراحی چنین لوله‌هایی این است که با **مقدار معین**

و ثابتی از مواد اولیه، لوله‌هایی طراحی شود که بتواند بیشترین مقدار آب یا گاز را عبور دهد. بنابر قضیهٔ بالا، شکل دایره مناسب‌ترین شکل برای این کار می‌باشد. برای انتخاب شکل زمین کشاورزی نیز به‌همین دلیل ما باید برای بیشترین استفاده از طول طناب، شکل دایره را انتخاب کنیم. قضیهٔ بالا همچنین دلیل عدم انتخاب شکل‌های نامنظم و ناآشنا برای زمین کشاورزی را روشن می‌کند. به‌علاوه روند زیاد شدن مساحت از مثلث به مربع، از مربع به شش‌ضلعی منتظم و از شش‌ضلعی منتظم به دایره کاملاً بامعنا و مهم است که در جلوتر به آن اشاره می‌کنیم.

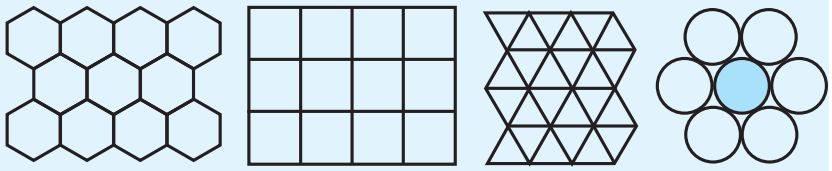
اکنون با طرح سؤال دیگری به خاصیت دیگری از دایره می‌پردازیم. فرض کنید یک سرباز که کلاهی لبه‌دار بر سر دارد، در کنار رودخانه‌ای ایستاده است. او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را بدون عبور از آن، به‌صورت خوبی تقریب بزند؟! در اینجا با خاصیت اولیه و ذاتی دایره روبه‌رو هستیم. **دایره مجموعه نقاطی است که از یک نقطهٔ ثابت به یک فاصله باشند**. چگونه از این تعریف می‌توانیم برای تقریب زدن عرض رودخانه استفاده کنیم؟ می‌دانیم همهٔ شعاع‌های دایره با هم برابرند. پس با در نظر گرفتن سرباز به‌عنوان مرکز دایره، و عرض رودخانه به‌عنوان یکی از شعاع‌های دایره مسئله به راحتی قابل حل می‌شود. اینجا کلاه لبه‌دار برای بالا بردن دقت و راحتی کار به کمک سرباز می‌آید. سرباز می‌تواند در حالتی که سرش ثابت است، کلاه را به‌گونه‌ای روی سر خود بگذارد که لبهٔ کلاه افق دید او را دقیقاً روی لبهٔ آن طرف رودخانه محدود کند. (شکل ۴) سپس در همان حال بدون خارج کردن سر از راستایش، به‌سمت عقب بچرخد (به‌سمتی که بتواند در آن جهت حرکت کند) و مکانی که افق دید او می‌باشد را در نظر بگیرد. فاصلهٔ سرباز تا آن نقطه یکی دیگر از شعاع‌های آن دایرهٔ فرضی است که سرباز در مرکز آن قرار داشت. حال به راحتی با متر کردن و یا قدم کردن، فاصلهٔ عرض رودخانه با تقریب خوبی به‌دست می‌آید. [۳]



شکل ۴. چگونگی محاسبهٔ فاصلهٔ عرض رودخانه

شش‌ضلعی منتظم[۳]

اگر کندوی زنبور عسل را دیده باشید، می‌بینید که زنبور با چه مهارت فوق‌العاده‌ای کندوی عسل خود را از قرار دادن شش‌ضلعی‌های منتظم کنار یکدیگر درست کرده است. چرا زنبور عسل از بین همهٔ شکل‌های هندسی، شش‌ضلعی منتظم را برای ساختن کندو انتخاب می‌کند؟ برای پرداختن به این سؤال، ابتدا به سراغ **کاشی‌کاری**[۴] می‌رویم. یکی از موضوعات جالب و کاربردی که هم جنبهٔ هنری دارد و هم با مفاهیم ریاضی ارتباط دارد، بحث کاشی‌کاری یک سطح هموار است. کاشی‌کاری یک سطح صاف به‌وسیله یک شکل هندسی یعنی پوشاندن آن سطح به‌وسیلهٔ آن شکل به‌طوری‌که تمام سطح پوشیده شود و شکل‌ها همپوشانی نداشته باشند. یک سؤال طبیعی که در ابتدا مطرح می‌شود این است که با کدام یک از اشکال هندسی می‌توان یک صفحه را کاشی‌کاری کرد؟ خود این سؤال سرآغاز سؤالات و بحث‌های جالب و زیبایی خواهد بود.



شکل ۵. کاشی‌کاری

با اندکی بررسی می‌توان فهمید که شش‌ضلعی هم یکی از شکل‌هایی است که در کنار مثلث و مربع قابلیت کاشی‌کاری صفحه را دارد. از طرفی با توجه به شکل (۵) مشخص است که دایره این توانایی را ندارد، چرا که قسمت‌هایی از صفحه پوشیده نمی‌شود. به‌عنوان قضیه‌ای زیبا و با کمک خاصیت‌های هندسی می‌توان اثبات کرد که **تنها چندضلعی‌هایی که می‌توانند صفحه را کاشی‌کاری کنند، مثلث، مربع و شش‌ضلعی منتظم می‌باشند!** (چگونگی اثبات این قضیه در نوع خود سؤال جالب و زیبایی

است.) حال به این سؤال اصلی برمی‌گردیم: چرا زنبور عسل برای درست کردن کندوی خود از شکل‌های دیگری چون دایره، مربع، مثلث و ... استفاده نمی‌کند؟ چگونه می‌توانیم دلایل مناسبی برای این انتخاب طبیعت بیاوریم؟ شاید ذکر چند نکته به ادامهٔ بحث کمک کند: طبیعت همیشه بهینه‌ترین و به صرفه‌ترین راه را انتخاب می‌کند، راهی که در آن کمترین اسراف صورت می‌گیرد. با این اوصاف، بیایید خود را جای زنبورهای سازنده بگذاریم و به ساختن کندوی عسل فکر کنیم. ما حتماً می‌خواهیم با یک مقدار معین موم (مادهٔ اولیه برای ساختن کندوی عسل)، کندو را به‌شکلی بسازیم که بیشترین مقدار عسل را در خود جای دهد. از طرف دیگر شکلی را باید انتخاب کنیم که قابلیت کاشی‌کاری کردن صفحه را داشته باشد. به علاوه استحکام ساختمان کندو نیز برای ما مهم خواهد بود. با توجه به این سه دلیل، به این نتیجه می‌رسیم که دایره گزینهٔ مناسبی برای انتخاب نیست، چون نمی‌توان با آن سطح را پوشاند و بین خانه‌های کندو فضا ایجاد می‌شود. پس به سراغ مثلث، مربع و شش‌ضلعی منتظم می‌رویم.

از طرفی، بر اساس مطالبی که در قسمت دایره گفته شد، برای به‌دست آوردن بیشترین مساحت با مقدار معینی موم، بهتر است شکل انتخابی به دایره نزدیک‌تر باشد. پس مثلث نیز گزینهٔ مناسبی نخواهد بود. از طرف دیگر برای استحکام بیشتر، مربع نیز گزینهٔ خوبی نیست زیرا اگر در راستای اضلاع نیرویی وارد شود ممکن است سبب از هم پاشیدن ساختمان کندو شود. اما شش‌ضلعی منتظم به طرز عجیبی، هر سه خاصیت مورد نظر را دارد. **پاپوس اسکندرانی**، ریاضیدان و اخترشناس یونانی قرن چهارم میلادی به‌خوبی به این مطلب اشاره کرده است: «زنبوران به‌خاطر پیش‌اندیشی هندسی، می‌دانند که با هزینهٔ مصالح برابر، شش‌ضلعی منتظم از مثلث و مربع بزرگ‌تر است و عسل بیشتری را جای می‌دهد». برای اطلاعات دقیق به [۴] صفحات ۱۲۷ تا ۱۲۹ رجوع کنید.

مثلث رولو

در این قسمت نیز با چند سؤال بحث را آغاز می‌کنیم. آیا تا به حال فکر کرده‌اید که چرا شکل در قابلمه‌ها و یا درپوش راه آب فاضلاب‌ها، غالباً دایره‌ای شکل هستند؟ به‌جای دایره از چه شکل دیگری می‌توان در چرخ ماشین یا دوچرخه استفاده کرد؟ چگونه می‌توان متهای طراحی کرد که به‌جای دایره، مربع سوراخ کند؟!

تعریف ۱ فرض کنید دو خط موازی در جهتی مشخص، یک شکل هندسی را به‌طور کامل دربرگرفته باشند. فاصلهٔ این دو خط موازی را **پهنای** شکل در جهت خطوط داده شده می‌گویند.

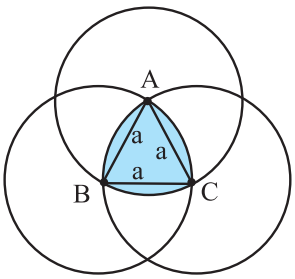
با این تعریف می‌توانیم پهنای اشکال هندسی معروف مانند مثلث، مربع و دایره را در جهت‌های متفاوت به‌دست آوریم. این ویژگی جالب دایره که پهنای یکسانی در تمام جهات دارد (برخلاف مربع)، ما را به تعریف زیر راهنمایی می‌کند.

تعریف ۲ یک شکل هندسی را **پهنا ثابت** گوییم هرگاه پهنا یا عرض آن در تمام جهات یکسان باشد. این عدد یکتا را **پهنای شک** می‌نامیم.

برای مثال پهنای ثابت یک دایره به شعاع r برابر است با طول قطر آن یعنی ۲r و پهنای مربعی به ضلع a در راستای یکی از قطرهایش، $\sqrt{a}$ و در راستای اضلاعش a می‌باشد.

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا به‌غیر از دایره، شکل پهنا ثابت دیگری وجود دارد؟ تا مدت‌های مدیدی باور بر این بود که دایره تنها شکل با پهنای ثابت است اما در واقع این‌گونه نبود. به‌غیر از دایره، بی‌نهایت شکل با پهنای ثابت وجود دارد (؟!). ساده‌ترین شکل با پهنای ثابت که دایره نیست **مثلث رولو** نام دارد. اگرچه این شکل برای بعضی ریاضی‌دانان شناخته شده بود ولی فرانتس رولو (Franz Reuleaux) ریاضیدان و مهندس آلمانی (۱۹۰۵- ۱۸۲۹) اولین کسی بود که متوجه شد این شکل با پهنای ثابت است. [۵]

طریقهٔ رسم: برای ترسیم، ابتدا یک مثلث متساوی‌الاضلاع به‌نام ABC با طول ضلع a رسم می‌کنیم. سپس به مرکز رأس A و شعاع a دایره‌ای می‌زنیم که B و C به‌وسیلهٔ کمان به هم وصل شوند. همین کار را برای رئوس دیگر انجام می‌دهیم. شکل حاصل از اتصال کمان‌ها، **مثلث رولو** نام دارد. (شکل ۶) با ایده گرفتن از همین روش، برای n ضلعی‌های منتظم با n فرد نیز می‌توان شکل‌های با پهنا ثابت دیگری رسم کرد (؟)



شکل ۶. مثلث رولو

تبصره: قابل ذکر است که استفاده از چندضلعی‌های منتظم تنها روش ترسیم شکل‌های با پهنای ثابت نیست و روش‌های متفاوت دیگری نیز وجود دارد که این خود مسئلهٔ هندسی جذابی است. از طرف دیگر، شاید این طور به‌نظر برسد که تمام شکل‌های با پهنای ثابت مانند مثلث رولو، از تعدادی کمان تشکیل شده‌اند که هر یک قسمتی از یک دایره هستند. اما چنین نیست! شکل‌های با پهنای ثابتی وجود دارند که هیچ قسمتی از آن‌ها، هر چند کوچک، کمانی از دایره نیست! [۵]

با محاسبه به آسانی درمی‌یابیم که محیط یک مثلث رولو با پهنای a و دایره‌ای با پهنای a (به این معنی است که قطر دایره a است) یکسان هستند. محیط هر دو برابر با πa است. این تساوی محیط‌ها، اتفاقی نیست.

قضیهٔ باربیه [۵] همهٔ شکل‌های با پهنای ثابت a، محیطی برابر πa دارند.

یکی از ویژگی‌های جالب مثلث رولو (و دیگر شکل‌های با پهنای ثابت)، قابلیت چرخش آن در یک مربع است. این ویژگی تنها متعلق به شکل‌های پهنا ثابت است و دیگر شکل‌ها همچون مثلث این قابلیت را ندارند. هری واتس (Harry Watts) از این ایده برای طراحی مته‌ای استفاده کرد که به‌جای دایره، مربع سوراخ می‌کند! مثلث رولو کاربردهای جالب و شگفت‌انگیز دیگری نیز در صنعت دارد که برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۵] رجوع کرد. حال اگر به سؤال‌هایی ابتدایی بازگردیم پاسخ‌های آن‌ها روشن است، شکل درهای قابلمه‌ها و درپوش‌های راه آب و فاضلاب، برای جلوگیری از افتادن دَر به داخل، باید شکل‌هایی پهنا ثابت همچون دایره و مثلث رولو باشند. با این حال، در کابردهای مشابه به‌خاطر هزینهٔ کمتر، دایره کاربرد وسیع‌تری پیدا کرده است.

همان‌گونه که دیده شد، مثلث رولو یکی از شکل‌های جذاب و شگفت‌انگیز ریاضی است که سؤال‌ها و معماهای جالبی به‌وجود می‌آورد و می‌توان با استفاده از آن هر کلاس هندسه را جذاب‌تر و مفیدتر کرد. از طرف دیگر، شایان توجه است مفهوم پهنا و اشکال با پهنای ثابت در بعد سه و برای احجام نیز قابل بحث و پیگیری است.

نتیجه‌گیری

در آموزش مفاهیم هندسی دبیرستان برای رسیدن به‌نوعی از تدریس که هم دانش‌آموزان را نسبت به ریاضی بی‌علاقه نکند و هم آن‌ها را در به‌کارگیری ریاضی در زندگی روزمره برای حل مسائل واقعی ترغیب کند، گریزی از برقراری ارتباط بین ریاضی و دنیای بیرون نداریم. آموزش مفاهیم هندسی بهتر است با مسائل مرتبط واقعی شروع شود. قضایا و خاصیت‌های به‌ظاهر مجرد، کاربردی و عینی نشان داده شوند. هیچ قضیه یا خاصیتی تدریس نشود مگر اینکه مسئله‌ای کاربردی با آن حل شود. منابع [۲، ۳، ۴، ۵] و کتاب ارزشمند «آموزش هنر حل مسئله» [۶] دارای مثال‌های فراوان و بی‌نظیری، برای معلمین علاقه‌مند به این زمینه می‌باشند.

پی‌نوشت‌ها

1. Reuleaux Triangle
2. Heron
3. Hexagon
4. Tilling or Tessellation

منابع

۱. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۱۰۶، سال دوازدهم.

۲. هانسبرگر، ر، (۱۳۷۱)، **ابتکارهایی در ریاضیات**، ترجمهٔ سیامک کاظمی، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی.

۳. پرلمان، ی، (۱۳۴۷)، **سرگرمی‌های هندسه**، ترجمهٔ پرویز شهریاری، چاپ اول، انتشارات خوارزمی.

۴. پاپاس، ت، (۱۳۸۸)، **افسون ریاضیات**، ترجمهٔ عباس‌علی کتیرایی، چاپ اول، انتشارات مازیار.

۵. اسمارت، ج، ۱، (۱۳۷۳)، **هندسه‌های جدید**، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، چاپ اول، انتشارات مدرسه.

۶. تابش، حاج‌بابایی، رستگار، (۱۳۸۰)، **آموزش هنر حل مسئله**، چاپ اول، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.